Автоматика и телемеханика, № 4, 2024

Линейные системы

 О.Б. ЦЕХАН, канд. физ.-мат. наук (tsekhan@grsu.by)
(Гродненский государственный университет им. Янки Купалы)

КОМПОЗИТНЫЙ НАБЛЮДАТЕЛЬ ЛИНЕЙНОЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ СИСТЕМЫ С КВАЗИДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ[1]

Для линейной нестационарной сингулярно возмущенной системы с малым параметром μ при части производных и квазидифференцируемыми коэффициентами установлены условия существования и построены μ-асимптотические композитные наблюдатели полного и редуцированного порядков. Ошибка оценивания состояния с произвольным наперед заданным показателем экспоненциального убывания сходится к бесконечно малой величине того же порядка малости, что и малый параметр. Векторы коэффициентов усиления наблюдателей выражены через коэффициенты усиления не зависящих от малого параметра подсистем меньшей размерности, чем исходная, а на параметры исходной системы накладываются требования более слабые, чем ранее известные. Приведен конструктивный алгоритм расчета вектора коэффициентов усиления композитного наблюдателя.

Ключевые слова: робастный наблюдатель, нестационарная сингулярно возмущенная система, квазидифференцируемость.

DOI: 10.31857/S0005231024040029, **EDN:** ZGWOOJ

1. Введение

Проблема оценивания состояний динамических систем по доступной информации актуальна в связи с ее важностью для различных систем позиционирования (определения местоположения) объектов управления. Однако в реальных ситуациях непосредственное измерение вектора состояния может быть затруднительно (по соображениям стоимости, из-за технологических ограничений и т.п.). В таком случае оценивать состояния можно с помощью специально построенной динамической системы, называемой наблюдателем (оценщиком, эстиматором, идентификатором). На вход наблюдателя подается выходная функция исходной системы, а его состояние должно в том или ином смысле приближать состояние исходной системы [1–6]. Если с увеличением времени состояние наблюдателя сходится к фазовому вектору системы,

[1] Исследование выполнено при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь в рамках государственной программы научных исследований Республики Беларусь на 2021–2025 годы (шифр задания «Конвергенция 1.2.04»).

то наблюдатель называется *асимптотическим*. Если, кроме того, имеет место экспоненциальная сходимость, то такой наблюдатель называется *экспоненциальным*.

Определение наблюдателя впервые введено Люенбергером в его диссертации в 1963 г. (см. также [7, 8]). Он показал, что для каждой наблюдаемой линейной системы может быть спроектирован наблюдатель, который сам является линейной системой, с ошибкой оценивания, стремящейся к нулю с заданной скоростью. При этом задача построения наблюдателя сводится к выбору коэффициента усиления, который рассчитывается по параметрам системы и не зависит от выхода [8].

Сингулярно возмущенные системы (СВС) с малым параметром μ при части производных широко распространены в приложениях в авиации, химии, электротехнике, механике и др. как модели многотемповых процессов при моделировании динамики летательных аппаратов, химических реакций, движений роботов-манипуляторов и т.п. (см. обзоры [9–13] и ссылки там). Для СВС в зависимости от информации о малом параметре и потребностей приложений можно рассматривать различные постановки задач наблюдения: при известном значении малого параметра μ [14], при известном замкнутом интервале значений малого параметра $\mu \in [\underline{\mu}, \overline{\mu}] \subset (0, \mu^0]$ [15], при неизвестном значении малого параметра μ [16]. Выделяют также постановки в зависимости от состава оцениваемых компонент: наблюдение как медленных, так и быстрых компонент, или только медленных компонент (см. [10] и ссылки там). В приложениях точное значение малого параметра μ может быть неизвестно. Поэтому важно, чтобы наблюдатели обеспечивали «хорошую» оценку состояния всему μ-параметрическому семейству СВС при различных реализациях параметра μ. Наблюдатели, обеспечивающие получение оценок состояний системы в условиях, когда модель системы точно не известна, называются *робастными* наблюдателями.

В зависимости от размерности наблюдателя выделяют [1, с. 379] *наблюдатели полного порядка*, состояние которых имеет ту же размерность, что и состояние наблюдаемой системы, а также *наблюдатели пониженного порядка*, размерность состояний которых меньше (на размерность выхода). Выделение в СВС быстрых динамик, при описании которых в модели появляется малый параметр, позволяет дополнительно редуцировать наблюдатели.

Использование многотемповой структуры СВС позволяет при построении наблюдателей оперировать системами меньшего размера, чем исходная – разделенными по временным шкалам подсистемами медленных и быстрых движений (см. [14, 16, 17]). При этом коэффициенты усиления для наблюдателя исходной СВС можно рассчитать в виде композиции коэффициентов усиления отдельно спроектированных наблюдателей медленной и быстрой подсистем. Такой подход для построения композитного [14] наблюдателя применяется в [17] для линейных стационарных СВС (ЛССВС). В [16] для ЛССВС введено понятие и обосновано построение μ-асимптотических наблюдателей, для которых ошибка оценивания состояния с произвольным наперед заданным показателем экспоненциального убывания сходится к бесконечно малой величине того же порядка малости, что и малый параметр. В [14] описана конструкция μ-асимптотического наблюдателя полного порядка линейной нестационарной СВС (ЛНСВС), однако правила построения таких наблюдателей там не приведены. Исследования по проектированию наблюдателей медленных состояний нелинейных СВС можно найти в [18–21] и цитируемых там работах.

Многие реальные динамические системы описываются моделями, параметры которых зависят от времени. Конструктивные методы анализа и синтеза нестационарных систем удается получить для систем, приводимых к стационарным [22]. Нестационарные системы могут возникать при линеаризации стационарных нелинейных систем. Линеаризация нестационарных систем может приводить к уменьшению гладкости параметров системы. Использование аппарата квазидифференцирования [23, 24] позволяет расширить класс нестационарных систем, для которых возможно получить конструктивные результаты.

При рассмотрении детерминированных систем наблюдения оценивание состояний предполагает наличие у системы определенного типа наблюдаемости. Для стационарной системы полная наблюдаемость гарантирует существование асимптотического наблюдателя [2]. Для нестационарной системы требуется ее равномерно полная наблюдаемость. Однако это свойство труднопроверяемо в терминах коэффициентов исходной системы наблюдения и поэтому с конструктивной точки зрения малоэффективно. Предложенный в [5] подход на основе техники квазидифференцирования позволяет конструктивно строить наблюдатели для равномерно наблюдаемых нестационарных систем, при этом ослабить известные требования гладкости коэффициентов.

Вопросы наблюдаемости СВС изучались ранее автором в [25–30]. Вклад данной работы состоит в том, что в отличие от [25–30] исследуется задача конструирования наблюдателей; в отличие от [5] рассматривается сингулярно возмущенная система; по сравнению с [14] разработан конструктивный алгоритм построения композитного экспоненциального наблюдателя ЛНСВС, при этом ослаблены требования на гладкость параметров системы; в отличие от [16, 17] рассматривается нестационарная СВС.

2. Постановка задачи

Рассматривается линейная нестационарная сингулярно возмущенная система (ЛНСВС)

$$\begin{aligned} &\dot{x}(t) = A_1(t)x(t) + A_2(t)y(t), \quad x \in \mathbb{R}^{n_1}, \quad y \in \mathbb{R}^{n_2}, \\ &\mu\dot{y}(t) = A_3(t)x(t) + A_4(t)y(t), \quad t \in T = [t_0, +\infty), \end{aligned} \tag{1}$$

со скалярным выходом

$$v(t) = c_1(t)x(t) + c_2(t)y(t), \quad v \in \mathbb{R}, \quad t \in T = [t_0, +\infty). \tag{2}$$

Здесь μ – малый параметр, $\mu \in (0, \mu^0]$, $\mu^0 \ll 1$, $x(t)$ – неизвестный вектор медленных переменных, $y(t)$ – неизвестный вектор быстрых переменных, $A_i(t)$, $i = \overline{1,4}$, $c_j(t)$, $j = 1, 2$, – непрерывные ограниченные на T матричные функции соответствующих размеров и вектор-строки функции соответственно, $v(t)$ – измеряемая выходная функция.

Пусть в ЛНСВС (1) реализовалось некоторое фиксированное значение параметра $\mu \in (0, \mu^0]$ и неизвестное начальное состояние

$$x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0, \quad x_0 \in \mathbb{R}^{n_1}, \quad y_0 \in \mathbb{R}^{n_2}, \tag{3}$$

которые в силу системы (1), (2) породили недоступный непосредственному наблюдению процесс $\{(x(t), y(t)),\ t \in T\}$ и измеряемую (без ошибок) выходную функцию $v(t) = v(t, \mu, x_0, y_0)$, $t \in T$. Требуется по известной функции $v(t)$, $t \in T$, оценить неизвестное состояние $(x(t), y(t))$, $t \in T$. Для решения этой задачи будем строить асимптотический наблюдатель.

Обозначим: $n = n_1 + n_2$, $z' = (x', y')$, $z_0' = (x_0', y_0')$, символ «$'$» (штрих) обозначает транспонирование. Определим по параметрам ЛНСВС (1), (2) вектор-функцию $c(t) = (c_1(t),\ c_2(t))$, а также зависящую от параметра $\mu > 0$ матричную функцию

$$A\,(t, \mu) = \begin{pmatrix} A_1(t) & A_2(t) \\ \dfrac{A_3(t)}{\mu} & \dfrac{A_4(t)}{\mu} \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Тогда систему (1)–(3) можно представить в пространстве состояний $\mathbb{R}^n$ как

$$(A_\mu, c): \quad \begin{aligned} &\dot z(t) = A\,(t, \mu)\, z(t),\ z \in \mathbb{R}^n,\ t \in T, \\ &v(t) = c\,(t)\, z(t),\ v \in \mathbb{R},\ t \in T, \\ &z(t_0) = z_0. \end{aligned} \tag{5}$$

Отождествим систему (5) с парой (A_μ, c), состоящей из матричных функций $A(t, \mu)$ и $c(t)$. Представим матрицу $A(t, \mu)$ (4) в виде

$$A(t, \mu) = \operatorname{diag}\,\left\{E_{n_1}, \frac{1}{\mu} E_{n_2}\right\} A(t), \quad A(t) = \begin{pmatrix} A_1(t) & A_2(t) \\ A_3(t) & A_4(t) \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Здесь и далее E_k обозначает единичную $k \times k$-матрицу.

В силу (6) систему (5), определяемую парой матричных функций $A(t), c(t)$ и малым параметром $\mu \in (0, \mu^0]$, отождествим также со множеством $\{A, c, \mu\}$. Если параметр μ принимает всевозможные значения из интервала $(0, \mu^0]$, то получаем μ-параметрическое семейство систем $\{A, c\}_{\mu^0}$, которое рассматривается как единый математический объект, определенный на $T \times (0, \mu^0]$. Фиксированное $\mu \in (0, \mu^0]$ выделяет из семейства $\{A, c\}_{\mu^0}$ конкретную систему (A_μ, c).

Пусть ρ – некоторое положительное число.

Определение 1. Систему дифференциальных уравнений

$$\dot{w}(t) = A(t,\mu)w(t) + K(t,\mu)\left(v(t) - c(t)w(t)\right), \quad w \in \mathbb{R}^n, \tag{7}$$

назовем ρ-экспоненциальным наблюдателем полного порядка семейства систем $\{A,c\}_{\mu^0}$ с вектором коэффициентов усиления $K(t,\mu)$ и коэффициентом оценивания $c_\rho(\mu) > 0$, $\mu \in (0,\mu^0]$, если для любого $\bar{t} > t_0$ ошибка оценивания $\varepsilon(t,\mu) = z(t,\mu) - w(t,\mu)$ удовлетворяет неравенству

$$||\varepsilon(t,\mu)|| \leqslant c_\rho(\mu)\exp(-\rho(t-\bar{t})), \forall t \geqslant \bar{t}, \forall \mu \in (0,\mu^0].$$

Метод построения ρ-экспоненциальных наблюдателей для равномерно наблюдаемых нестационарных систем с квазидифференцируемыми коэффициентами предложен в [5]. При любом фиксированном μ можно использовать этот метод для построения наблюдателя ЛНСВС (5). Однако при этом могут возникнуть следующие проблемы: в общем случае параметры наблюдателя будут зависеть от малого параметра, который может быть заранее неизвестен; при использовании метода из [5] требуется существование канонической формы Фробениуса и построение соответствующей матрицы преобразования для зависящей от параметра СВС большой размерности. При этом при $\mu \to 0$ матрица преобразования в общем случае будет плохо обусловленной, а элементы канонической формы Фробениуса стремятся к бесконечности. Поэтому актуальна разработка методов синтеза робастных по малому параметру наблюдателей, не использующих знание величины малого параметра и обеспечивающих «хорошие» оценки состояния при любых достаточно малых его значениях.

Условия робастной P-равномерной наблюдаемости линейной нестационарной двухтемповой ЛНСВС, необходимые для построения ρ-экспоненциальных наблюдателей, получены в [31].

Вектор-функцию $f(t,\mu)$ на интервале $\left[t^1,\infty\right)$, такую что существуют постоянные $\mu^* > 0$, $d > 0$, такие что евклидова норма $||f(t,\mu)||$ удовлетворяет неравенству $||f(t,\mu)|| \leqslant d\mu \ \ \forall \mu \in (0,\mu^*]$, $\forall t \in \left[t^1,\infty\right)$, обозначим через $O(\mu)$.

Пусть $r(t,\mu) > 0$ – заданная ограниченная на $T \times (0,\mu^0]$ функция.

Определение 2. Систему (7) *назовем ρ-экспоненциальным наблюдателем полного порядка с ограниченной на $T \times (0,\mu^0]$ ошибкой $r(t,\mu)$ для семейства систем $\{A,c\}_{\mu^0}$, если для любого $\bar{t} > t_0$ ошибка оценивания удовлетворяет неравенству $||\varepsilon(t,\mu)|| \leqslant c_\rho(\mu)\exp(-\rho(t-\bar{t})) + r(t,\mu)$, $\forall t \geqslant \bar{t}$, $\forall \mu \in (0,\mu^0]$.*

Если в (7) $K(t,\mu) = \mathrm{diag}\,\{E_{n_1}, \frac{1}{\mu}E_{n_2}\}K(t)$, $c_\rho(\mu) \equiv c_\rho$, $\mu \in (0,\mu^0]$, *и при некотором n, $n = 1,2,3,\ldots$, верно $r(t,\mu) = O(\mu^n)$, $t \in T$, то* (7) *назовем робастным μ-асимптотическим ρ-экспоненциальным наблюдателем семейства ЛНСВС* (5).

Введенные выше определения согласованы с понятиями из [5, 14, 16, 32].

Робастный μ-асимптотический ρ-экспоненциальный наблюдатель семейства $\{A, c\}_{\mu^0}$ ЛНСВС (5) выполняет равномерное (по μ) асимптотическое (по t) оценивание вектора состояния (x, y) любой системы семейства ЛНСВС (5) с ограниченной ошибкой, которая имеет порядок малости не меньше, чем μ. Его вектор коэффициентов усиления рассчитывается независимо от малого параметра и обеспечивает получение таких оценок состояний систем семейства ЛНСВС (5), что ошибка оценивания с произвольным наперед заданным экспоненциальным показателем сходится к бесконечно малой величине порядка малости не менее чем малый параметр.

Задача 1. Для ЛНСВС (1)–(2) *построить робастный μ-асимптотический ρ-экспоненциальный наблюдатель. При этом коэффициент усиления должен выражаться через коэффициенты усиления не зависящих от малого параметра подсистем, построенных по ЛНСВС* (1)–(2) *и имеющих размерность меньше исходной.*

3. Подсистемы ЛНСВС, их наблюдаемость и наблюдатели

3.1. Подсистемы ЛНСВС и их связь с ЛНСВС

Решение задач анализа и синтеза СВС зачастую упрощается при использовании асимптотической декомпозиции СВС на подсистемы меньшей размерности. В настоящей работе описан конструктивный метод построения наблюдателей для ЛНСВС, использующий асимптотическую декомпозицию ЛНСВС и реализованный через построение наблюдателей, связанных с ЛНСВС (1)–(2) [33] не зависящих от параметра μ вырожденной системы (ВС) и системы погранслоя (СП), которые получаются из сингулярно возмущенной системы, если рассмотреть ее отдельно в «быстрой» и «медленной» временных шкалах при $\mu = 0$.

Пусть $\det A_4(t) \neq 0$, $t \in T$, т.е. рассматривается стандартная ЛНСВС. Тогда ВС (медленная подсистема) имеет вид

$$(8)\qquad (A_s, c_s): \quad \begin{aligned} &\dot{x}_s(t) = A_s(t)\, x_s(t),\, x_s(0) = x_0,\, v_s(t) = c_s(t)\, x_s(t),\, t \in T,\\ &A_s(t) \triangleq A_1(t) - A_2(t)A_4^{-1}(t)A_3(t),\\ &\qquad\qquad c_s(t) \triangleq c_1(t) - c_2(t)A_4^{-1}(t)A_3(t), \end{aligned}$$

и является нестационарной n_1-мерной системой. Отождествим ее с парой (A_s, c_s).

СП (быстрая подсистема) для ЛНСВС (1)–(2) имеет вид

$$(9)\qquad (A_4(t_0), c_2(t_0)): \quad \begin{aligned} &\frac{dy_f(\tau)}{d\tau} = A_4(t_0)y_f(\tau), \quad v_f(\tau) = c_2(t_0)y_f(\tau),\\ &\qquad \tau = \frac{t - t_0}{\mu} \in T_\mu \triangleq \left[0, \frac{t_1 - t_0}{\mu}\right],\\ &y_f(\tau) = y(t_0 + \mu\tau) - A_4^{-1}(t_0)A_3(t_0)x_0,\\ &\qquad y_f(0) = y_0 + A_4^{-1}(t_0)A_3(t_0)x_0, \end{aligned}$$

и является линейной стационарной n_2-мерной системой. Отождествим ее с парой $(A_4(t_0), c_2(t_0))$.

Наряду со стационарной СП (9) введем *t-семейство быстрых подсистем* $(A_4, c_2)(t)$ вида (9) с $A_4(t), c_2(t)$ (где $t \in T$ – фиксированное значение, рассматривается как параметр семейства) вместо $A_4(t_0), c_2(t_0)$. СП (9) выделяется из t-семейства быстрых подсистем $(A_4, c_2)(t)$ при $t = t_0$.

Заметим, что ВС (A_s, c_s) (8) и t-семейство быстрых подсистем $(A_4, c_2)(t)$ (9) определяются для всего семейства $\{A, c\}_{\mu^0}$ сразу.

Следующее утверждение, которое следует из [33, теорема 6.1, с. 227], устанавливает связь между решениями ЛНСВС (1), (3) и ее подсистем (8), (9).

Утверждение 1. Пусть корни $\lambda\left(A_4\left(t\right)\right)$ характеристического уравнения $\det\left(\lambda E_{n_2} - A_4\left(t\right)\right) = 0$ матрицы $A_4\left(t\right)$ удовлетворяют неравенству $\operatorname{Re}\lambda\left(A_4\left(t\right)\right) < -\gamma < 0 \;\; \forall t \in T$, $\gamma = \mathrm{const} > 0$; $A_i\left(t\right)$, $i = \overline{1,4}$ непрерывно дифференцируемы на T, $\dot{A}_k\left(t\right)$, $k = \overline{2,4}$, ограничены на T. Тогда существует $\mu^* > 0$ такое, что для всех $\mu \in (0, \mu^*]$ функции

$$x^1\left(t\right) = x_s\left(t\right), \quad y^1\left(t\right) = y_f\left(\frac{t - t_0}{\mu}\right) - A_4^{-1}\left(t\right) A_3\left(t\right) x_s\left(t\right), \quad t \in T,$$

где $x_s\left(t\right)$, $y_f\left(t\right)$ – решения ВС (8) и СП (9), являются равномерными на $t \in T$ асимптотическими аппроксимациями 1-го порядка решения задачи (1), (3):

$$x\left(t\right) = x^1\left(t\right) + O\left(\mu\right), \quad y\left(t\right) = y^1\left(t\right) + O\left(\mu\right), \quad t \in T.$$

3.2. Наблюдаемость подсистем

В настоящей работе при построении наблюдателей для ВС (8) используется метод, налагающий более слабые требования на гладкость функций по сравнению с ранее известными, при этом используется понятие квазидифференцируемости относительно некоторой нижнетреугольной матрицы P_s, системы класса $\{P_s, n_1 - 1\}$ и равномерной наблюдаемости ВС. Введем связанные с этим понятия.

Для произвольного целого неотрицательного числа k обозначим через $\mathcal{U}_k(T)$ совокупность всех нижнетреугольных матриц $P(t)$ размера $\big((k+1)\times(k+1)\big)$ с непрерывными на T элементами $p_{ji}(t)$ $(j, i = 0, 1, \ldots, k)$, удовлетворяющими условию $p_{jj}(t) \neq 0$ $(t \in T)$, $(j = 0, 1, \ldots, k)$. Для произвольной матрицы $P(t)$ из множества $\mathcal{U}_k(T)$ и непрерывной функции $w : T \to \mathbb{R}$ квазипроизводные ${}^{j}_{P}w(t)$ порядка j $(j = 0, 1, \ldots, k)$ относительно матрицы $P(t)$ определяются по рекуррентным правилам [23]:

$$\begin{gathered} {}^{0}_{P}w(t) = p_{00}(t)w(t), \quad {}^{1}_{P}w(t) = p_{11}(t)\frac{d\big({}^{0}_{P}w(t)\big)}{dt} + p_{10}(t)\big({}^{0}_{P}w(t)\big), \; \ldots, \\ {}^{j}_{P}w(t) = p_{jj}(t)\frac{d\big({}^{j-1}_{P}w(t)\big)}{dt} + \sum_{i=0}^{j-1} p_{ji}(t)\big({}^{i}_{P}w(t)\big) \; (j = 2, 3, \; \ldots, k). \end{gathered} \tag{10}$$

Предполагается, что операции дифференцирования в формулах (10) выполнимы и приводят к непрерывным функциям.

Пусть задана некоторая матрица $P_s \in \mathcal{U}_{n_1}(T)$. Для ВС (8), следуя [24, с. 31], введем

О п р е д е л е н и е 3. ВС (A_s, c_s) имеет P_s-класс m, если всякая ее выходная функция $v_s(t) = v_s(t, x_0)$, $t \in T$, имеет непрерывные квазипроизводные относительно матрицы P_s до порядка m включительно.

Применяя к системе (8) Лемму 2.1 из [24, с. 32] получаем

У т в е р ж д е н и е 2. ВС (8) имеет P_s-класс $n_1 - 1$ тогда и только тогда, когда для любого $k = 1, \ldots, n_1 - 1$ существуют и непрерывны вектор-строки

$$s_{s0}(t) = p_{s,00}(t)c_s(t),\ s_{sj}(t) =$$

$$= p_{s,jj}(t)\big(s_{s,j-1}(t)A_s(t) + \dot{s}_{s,j-1}(t)\big) + \sum_{i=0}^{j-1} p_{s,ji}(t)s_{si}(t). \tag{11}$$

В частности, ВС (8) имеет класс $\{P_s, n_1 - 1\}$ относительно $(n_1 \times n_1)$-матрицы P_s вида (18) из [5], построенной по параметрам ВС (8).

О п р е д е л е н и е 4. ВС (A_s, c_s) (8) класса $\{P_s, n_1 - 1\}$ называется P_s-равномерно наблюдаемой на отрезке T, если при любом $x_0 \in \mathbb{R}^{n_1}$ отображение

$$x_s(t) \to \big({}^{0}_{P_s}v_s(t),\ {}^{1}_{P_s}v_s(t),\ \ldots,\ {}^{n_1-1}_{P_s}v_s(t)\big),\ v_s(t) = v_s(t, x_0)$$

инъективно для каждого $t \in T$.

О п р е д е л е н и е 5. Назовем t-семейство быстрых подсистем $(A_4, c_2)(t)$ (9) полностью наблюдаемым на T_μ, если любая подсистема из t-семейства $(t \in T)$ полностью наблюдаема [34, с. 68; 24, с. 29].

Пусть ВС (A_s, c_s) (8) имеет P_s-класс $n_1 - 1$. Определим $(n_1 \times n_1)$-матрицу наблюдаемости ВС (A_s, c_s):

$$S_{P_s}(t) = \begin{pmatrix} s_{s0}(t) \\ s_{s1}(t) \\ \cdots\cdots \\ s_{s,n_1-1}(t) \end{pmatrix}, \quad (t \in T),$$

где n_1-вектор-строки $s_{sj}(t)$, $j = 1, 2, \ldots$ определяются по формулам (11) и $(n_2 \times n_2)$-матрицу наблюдаемости t-семейства быстрых подсистем $(A_4, c_2)(t)$:

$$S_f(t) = \begin{pmatrix} s_{f0}(t) \\ s_{f1}(t) \\ \cdots\cdots \\ s_{f,n_2-1}(t) \end{pmatrix}, \quad (t \in T), \tag{12}$$

где n_2-вектор-строки $s_{f0}(t), s_{f1}(t), \ldots$ определяются по формулам

$$s_{fj}(t) = s_{f,j-1}(t)A_4(t), \quad s_{f0}(t) = c_2(t). \tag{13}$$

Применяя к ВС (8) и t-семейству быстрых подсистем (9) условия из [34, с. 68; 35, с. 89], получаем

Утверждение 3. ВС (8) P_s-класса $n_1 - 1$ является P_s-равномерно наблюдаемой на T тогда и только тогда, когда $\operatorname{rank} S_{P_s}(t) = n_1$ *для любого* $t \in T$.

Утверждение 4. t-Семейство быстрых подсистем $(A_4, c_2)(t)$ (9) полностью наблюдаемо тогда и только тогда, когда $\operatorname{rank} S_f(t) = n_2$ *для любого* $t \in T$.

3.3. Наблюдатели подсистем

Пусть ρ_s, ρ_f – некоторые положительные числа.

Определение 6. Систему дифференциальных уравнений

$$\dot{w}_s(t) = A_s(t)w_s(t) + k_s(t)\left(v_s(t) - c_s(t)w_s(t)\right), \quad w_s \in \mathbb{R}^{n_1}, \quad t > t_0, \tag{14}$$

назовем ρ_s-экспоненциальным наблюдателем ВС (A_s, c_s) (8) с вектором коэффициентов усиления $k_s(t)$ и константой оценивания $c_{\rho s} > 0$, если ошибка оценивания $\varepsilon_s(t) = x_s(t) - w_s(t)$ удовлетворяет неравенству $||\varepsilon_s(t)|| \leqslant$ $\leqslant c_{\rho s} \exp(-\rho_s(t - \bar{t}))$, $t \geqslant \bar{t}$, для любого $\bar{t} > t_0$.

Определение 7. Систему дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered}\frac{dw_f(\tau)}{d\tau} = A_4(t)w_f(\tau) + k_f(t)\left(v_f(\tau) - c_2(t))w_f(\tau)\right), \\ w_f \in \mathbb{R}^{n_2}, \quad \tau > 0, \quad t \in T,\end{gathered} \tag{15}$$

назовем ρ_f-экспоненциальным наблюдателем t-семейства быстрых подсистем $(A_4, c_2)(t)$ с вектором коэффициентов усиления $k_f(t)$ и константой оценивания $c_{\rho f} > 0$, если для любой системы t-семейства ($\forall t \in T$) ошибка $\varepsilon_f(\tau) = y_f(\tau) - w_f(\tau)$ удовлетворяет неравенству $||\varepsilon_f(\tau)|| \leqslant$ $\leqslant c_{\rho f} \exp(-\rho_f(\tau - \bar{\tau}))$, $\tau \geqslant \bar{\tau}$, для любого $\bar{\tau} > 0$.

Обозначим через $\mathcal{L}(n_1)$ множество всех обратимых непрерывно дифференцируемых на T $(n_1 \times n_1)$-матриц, ограниченных на T вместе со своими обратными. Множество $\mathcal{L}(n_1)$ является группой Ляпунова [36]. Действие группы $\mathcal{L}(n_1)$ на паре (A, c), состоящей из $(n_1 \times n_1)$-матричной функции и n_1-вектор-строки с непрерывными на T элементами, зададим правилом [24, с. 42]

$$G * (A, c) = \left(G^{-1}AG - G^{-1}\dot{G},\, cG\right), G \in \mathcal{L}(n_1). \tag{16}$$

Используя [5, 31], несложно убедиться в справедливости следующих утверждений.

Утверждение 5. *Если для некоторой $P_s \in \mathcal{U}_{n_1}(T)$ ВС* (8) *P_s-равномерно наблюдаема и для нее существует каноническая форма Фробениуса (A_s^0, c_s^0)*

$$(17) \qquad A_s^0\,(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \alpha_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha_{n_1-1} \end{pmatrix}, \quad c_s^0\,(t) = (0, 0, \dots, 0, 1)'$$

относительно действий группы Ляпунова $\mathcal{L}(n_1)$, то для любого $\rho_s > 0$ существует ρ_s-экспоненциальный наблюдатель (14).

Утверждение 6. *Если семейство быстрых подсистем* (9) *полностью наблюдаемо, то для любого $\rho_f > 0$ существует ρ_f-экспоненциальный наблюдатель* (15).

Наблюдатели для ВС (8) и t-семейства (9) можно построить, применяя метод построения ρ-экспоненциальных наблюдателей из [5, Теорема 5].

3.3.1. Схема построения ρ-экспоненциального наблюдателя для нестационарной ВС (8)

1. Пусть ВС (8) равномерно наблюдаема (утверждение 3) и для нее существует каноническая форма Фробениуса (A_s^0, c_s^0) относительно действий группы Ляпунова $\mathcal{L}(n_1)$ [24, с. 69]. Обозначим через $\alpha_s(t) = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n_1-1})'$ n_1-вектор-столбец коэффициентов матрицы $A_s^0(t)$.

2. Находим преобразование $G_s(t) \in \mathcal{L}(n_1)$, для которого справедливо $G_s * (A_s, c_s) = (A_s^0, c_s^0)$.

Заметим, что для построения канонической формы Фробениуса и соответствующей матрицы преобразования $G_s(t)$ из группы Ляпунова $\mathcal{L}(n_1)$ можно использовать метод, описанный в [5; 24, с. 81]

3. Выберем действительные числа $\lambda_1, \dots, \lambda_{n_1}$, удовлетворяющие для заданного $\rho > 0$ неравенству $\lambda_i < -\rho$, $i = 1, \dots, n_1$.

4. Построим многочлен $(\xi - \lambda_1)(\xi - \lambda_2)\cdots(\xi - \lambda_{n_1}) = \xi^{n_1} - \beta_{n_1-1}\xi^{n-1} - \cdots$ $\cdots - \beta_1\xi - \beta_0$ и пусть $\beta_s = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{n_1-1})'$ – n_1-вектор-столбец.

5. Рассчитаем вектор коэффициентов усиления $k_s(t)$ для наблюдателя ВС (14):

$$(18) \qquad k_s(t) = G_s(t)\big(\alpha_s(t) - \beta_s\big).$$

3.3.2. Схема построения ρ-экспоненциального наблюдателя для t-семейства стационарных быстрых подсистем

1. Пусть t-семейство быстрых подсистем (9) полностью наблюдаемо (утверждение 4). Под канонической формой Фробениуса (A_f^0, c_f^0) t-семей-

ства (9) будем понимать совокупность систем, каждая из которых является канонической формой Фробениуса соответствующей быстрой подсистемы. Чтобы найти ее, построим характеристический полином t-семейства (9). При каждом $t \in T$ его коэффициенты задают вектор $\alpha_f(t) = (\alpha_0(t), \alpha_1(t), \ldots \ldots, \alpha_{n_2-1}(t))'$ коэффициентов канонической формы Фробениуса соответствующей быстрой подсистемы.

2. Рассчитаем матрицу перехода к канонической форме Фробениуса для t-семейства быстрых подсистем: $G_f(t) = S_f^{-1}(t)S_f^0(t)$, где $S_f(t)$ и $S_f^0(t)$ – матрицы наблюдаемости t-семейства быстрых подсистем и его канонической формы Фробениуса, рассчитанные по формулам (12), (13) с матрицами $A_4(t), c_2(t)$ и $A_f^0(t), c_f^0(t)$ соответственно.

3. Выберем действительные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n_2}$, удовлетворяющие для заданного положительного числа ρ неравенству $\lambda_i < -\rho$, $i = 1, \ldots, n_2$.

4. Образуем n_2-вектор $\beta_f = (\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{n_2-1})'$ с постоянными элементами такой, что $(\xi - \lambda_1)(\xi - \lambda_2)\cdots(\xi - \lambda_{n_2}) = \xi^{n_1} - \beta_{n_1-1}\xi^{n-2} - \cdots - \beta_1\xi - \beta_0$.

5. Рассчитаем вектор коэффициентов усиления $k_f(t)$ для наблюдателя t-семейства СП (15):

$$k_f(t) = G_f(t)\left(\alpha_f(t) - \beta_f\right). \tag{19}$$

Заметим, что определенная таким образом функция $k_f(t)$, $t \in T$, наследует свойства гладкости и непрерывности функций $\alpha_f(t)$, а значит и коэффициентов $A_4(t), c_2(t)$ t-семейства быстрых подсистем.

4. Композитный наблюдатель ЛНСВС

4.1. Робастный μ-асимптотический ρ-экспоненциальный наблюдатель ЛНСВС

Пусть $\rho > 0$ задано.

Т е о р е м а 1. *Пусть*

(i) *для некоторой матрицы $P_s \in \mathcal{U}_{n_1}(T)$ выполнены условия утверждений 2, 3 и ВС (A_s, c_s) (8) обладает канонической формой Фробениуса относительно действия группы Ляпунова $\mathcal{L}(n_1)$;*

(ii) *для ВС (8) построен ρ-экспоненциальный наблюдатель с вектором коэффициентов усиления $k_s(t)$ (18) и константой оценивания c_{ρ_s};*

(iii) *выполнены условия утверждения 4;*

(iv) *для t-семейства быстрых подсистем $(A_4, c_2)(t)$ (9) построен $\mu^0\rho$-экспоненциальный наблюдатель с вектором коэффициентов усиления $k_f(t)$ (19) и константой оценивания c_{ρ_f};*

(v) *матричные функции*

$$\begin{aligned} &\tilde{A}_1(t) = A_1(t) - k_1(t)c_1(t), \quad \tilde{A}_2(t) = A_2(t) - k_1(t)c_2(t),\\ &\tilde{A}_3(t) = A_3(t) - k_2(t)c_1(t), \quad \tilde{A}_4(t) = A_4(t) - k_2(t)c_2(t), \end{aligned} \tag{20}$$

где

$$k_1(t) = A_2(t)A_4^{-1}(t)k_f(t) + k_s(t)[E_{n_2} - c_2(t)A_4^{-1}(t)k_f(t)], \quad k_2(t) = k_f(t), \tag{21}$$

непрерывно дифференцируемы и ограничены, производные функций $\tilde{A}_i(t)$, $i = 2, 3, 4$, *ограничены на* T;

(vi) $\operatorname{Re}\lambda(\tilde{A}_4(t)) \leqslant -\gamma_1 < 0$, $\gamma_1 = \mathrm{const} > 0$, $\forall t \geqslant t_0$.

Тогда существует $\mu^* \in (0, \mu^0]$ *такое, что система*

$$\begin{gathered} \dot{w}_x(t) = \tilde{A}_1(t)w_x(t) + \tilde{A}_2(t)w_y(t) + k_1(t)v(t), \;\; w_x \in \mathbb{R}^{n_1}, \;\; w_y \in \mathbb{R}^{n_2}, \\ \mu\dot{w}_y(t) = \tilde{A}_3(t)w_x(t) + \tilde{A}_4(t)w_y(t) + k_2(t)v(t), \;\; t > t_0, \\ w_x(0) = 0, \;\; w_y(0) = 0, \end{gathered} \tag{22}$$

является робастным μ*-асимптотическим* ρ*-экспоненциальным наблюдателем семейства* $\{A, c\}_{\mu^*}$ *ЛНСВС* (5).

Доказательство теоремы 1 приведено в Приложении.

Заметим, что требование существования канонической формы Фробениуса для ВС ослабляет требование существования канонической формы Фробениуса для исходной ЛНСВС. Например, система вида $\dot{x}(t) = |t-1|x(t) + (1 - |t-1|)y(t)$, $\mu\dot{y}(t) = tx(t) - ty(t)$, $v(t) = y(t)$ не обладает канонической формой Фробениуса [24, с. 73, теорема 3.4]. Вместе с тем ВС $\dot{x}_s(t) = x_s(t)$, $v_s(t) = x_s(t)$, для этой системы имеет вид канонической формы Фробениуса. Для t-семейства стационарных быстрых подсистем каноническая форма Фробениуса существует всегда при выполнении условия полной наблюдаемости (утверждение 4). Для приведенного здесь примера СП имеет вид $\frac{d}{d\tau}y_f(\tau) = -t\,y_f(\tau), v_f(\tau) = y_f(\tau)$ и является полностью наблюдаемой.

4.2. Алгоритм построения робастного μ*-асимптотического* ρ*-экспоненциального наблюдателя ЛНСВС* (5)

Из доказательства теоремы 1 (см. Приложение) вытекает следующий алгоритм.

1. Строим ВС (8) и проверяем выполнение условий (i) теоремы 1. Если они не выполнены ни для одной P_s, то ВС не является равномерно наблюдаемой и, значит, для нее не существует канонической формы Фробениуса. Заметим, что одна из матриц P_s, для которых выполняются условия утверждения 2, – это матрица P_s вида (18) из [5], которая строится по параметрам ВС (8).

2. Строим t-семейство быстрых подсистем (9) и проверяем выполнение условий (iii) теоремы 1.

3. Задаем желаемую величину скорости экспоненциального убывания ошибок наблюдения $\rho > 0$.

4. Вычисляем вектор коэффициентов усиления $k_s(t)$ ρ-экспоненциального наблюдателя для ВС (8) по формуле (18) (п. 3.3.1).

5. Вычисляем вектор коэффициентов усиления $k_f(t)$ $\mu^0\rho$-экспоненциального наблюдателя для t-семейства быстрых подсистем (9) по формуле (19) (п. 3.3.2).

6. Рассчитываем по формулам (21) коэффициенты $k_1(t)$, $k_2(t)$.

7. Проверяем выполнение условий (v) и (vi) теоремы 1.

8. Формируем композитный наблюдатель (22).

5. Редуцированные наблюдатели ЛНСВС

Состояние наблюдателя (22) приближается к $O(\mu)$-аппроксимации состояния ЛНСВС (5) с экспоненциальной скоростью ρ, которую можно выбрать произвольно. Однако если значение малого параметра μ очень мало или неизвестно, то практически реализовать наблюдатель (22) затруднительно. В связи с этим целесообразно оценивать состояние исходной системы с помощью системы, не имеющей «быстрых» режимов наблюдателя (22).

Аналогично [16] введем два редуцированных наблюдателя ЛНСВС.

Согласно первому подходу для ВС (8) исходной ЛНСВС (5) строится асимптотический наблюдатель Люенбергера (14). В [16] для стационарных СВС доказано, что если матрицы ВС (8) и СП (9) гурвицевы и ВС наблюдаема, то асимптотический наблюдатель ВС является μ-асимптотическим наблюдателем исходной ЛССВС. Следуя схеме доказательства теоремы 4 из [16] с использованием Теоремы 6.1. [33, с. 227], аналогичный результат можно доказать для ЛНСВС.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия утверждений 1, 5. Тогда существует $\mu^* > 0$ такое, что система*

$$\begin{gathered}\dot{w}_{sx}(t) = (A_s(t) - k_s(t)c_s(t))\, w_{sx}(t) + k_s(t)v(t),\\ w_{sy} = -A_4^{-1}(t)A_3(t)w_{sx}(t), \quad t > t_0,\\ w_{sx} \in \mathbb{R}^{n_1}, \quad w_{sy} \in \mathbb{R}^{n_2}, \quad w_{sx}(0) = 0,\end{gathered} \tag{23}$$

является робастным μ-асимптотическим ρ-экспоненциальным наблюдателем семейства $\{A, c\}_{\mu^*}$ ЛНСВС (5).

Согласно второму подходу строится вырожденная система для наблюдателя (22), которая и принимается за наблюдатель исходной ЛНСВС (5).

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда существует $\mu^* > 0$ такое, что система*

$$\begin{gathered}\dot{w}_{xs}(t) = \left(\tilde{A}_1(t) - \tilde{A}_2(t)\tilde{A}_4^{-1}(t)\tilde{A}_3(t)\right) w_{xs}(t) + \left(k_1(t) - \tilde{A}_2(t)\tilde{A}_4^{-1}(t)k_2(t)\right) v(t),\\ w_{ys}(t) = -\tilde{A}_4^{-1}(t)\tilde{A}_3(t)w_{xs}(t) - \tilde{A}_4^{-1}(t)k_2(t)v(t), \quad t > t_0,\\ w_{xs} \in \mathbb{R}^{n_1}, \quad w_{ys} \in \mathbb{R}^{n_2}, \quad w_{xs}(0) = 0,\end{gathered} \tag{24}$$

является робастным μ-асимптотическим ρ-экспоненциальным наблюдателем семейства $\{A, c\}_{\mu^*}$ ЛНСВС (5).

6. Примеры

Рассмотрим численные примеры, иллюстрирующие применение предложенного метода построения робастных μ-асимптотических ρ-экспоненциальных наблюдателей ЛНСВС. Практическая реализация метода использует изложенный в разделе 4.2 (пп. 1–8) алгоритм построения робастного μ-асимптотического ρ-экспоненциального наблюдателя ЛНСВС (5) и схемы построения ρ-экспоненциальных наблюдателей для подсистем из разделов 3.3.1 и 3.3.2.

Пример 1. Рассмотрим ЛНСВС

$$\begin{gathered}\dot{x}_1(t) = (\alpha(t)-1)x_2(t) + (2-\alpha(t))y(t), \quad \dot{x}_2(t) = -x_1(t) - x_2(t), \\ \mu\dot{y}(t) = x_2(t) - y(t), \quad v(t) = y(t), \quad t \in T,\end{gathered} \tag{25}$$

матрицы которой имеют вид: $A_1(t) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha(t)-1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $A_2(t) = \begin{pmatrix} 2-\alpha(t) \\ 0 \end{pmatrix}$, $A_3(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_4(t) = \begin{pmatrix} -1 \end{pmatrix}$, $c_1(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$, $c_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$ и функция $\alpha(t)$ ограничена и непрерывно дифференцируема на T с ограниченной производной.

1. Вырожденная система для ЛНСВС (25):

$$\dot{x}_{s1}(t) = x_{s2}(t), \quad \dot{x}_{s2}(t) = -x_{s1}(t) - x_{s2}(t), \quad v_s(t) = x_{s2}(t), \tag{26}$$

где $A_s = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $c_s = \begin{pmatrix} 0, & 1 \end{pmatrix}$, стационарная и имеет невырожденную матрицу наблюдаемости $S_s(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, значит, для ВС (26) существует каноническая форма Фробениуса и согласно утверждению 3 выполнено условие (i) теоремы 1.

Преобразование (16) ВС (26) с помощью матрицы $G_s(t) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ приводит к канонической форме Фробениуса (A_s^0, c_s^0), $A_s^0(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $c_s^0(t) = (0,\ 1)$, где $\alpha_s(t) = (-1,\ -1)'$.

2. t-семейство быстрых подсистем для ЛНСВС (25)

$$\frac{d\tilde{y}(\tau)}{d\tau} = -\tilde{y}(\tau), \quad \tilde{v}_f(\tau) = \tilde{y}(\tau), \quad t \in T, \tag{27}$$

имеет матрицу наблюдаемости $S_f(t) = (1)$, $\operatorname{rank} S_f(t) = 1, \forall t \in T$, значит, согласно утверждению 4 выполнено условие (iii) теоремы 1.

3. Зададим скорость экспоненциального убывания ошибок наблюдателя: $\rho = 2$.

4. Возьмем $\lambda_i = -3, i = 1, 2$, рассчитаем $\beta_s = (-9, -6)'$ и $k_s(t) = (-8,\ 5)'$.

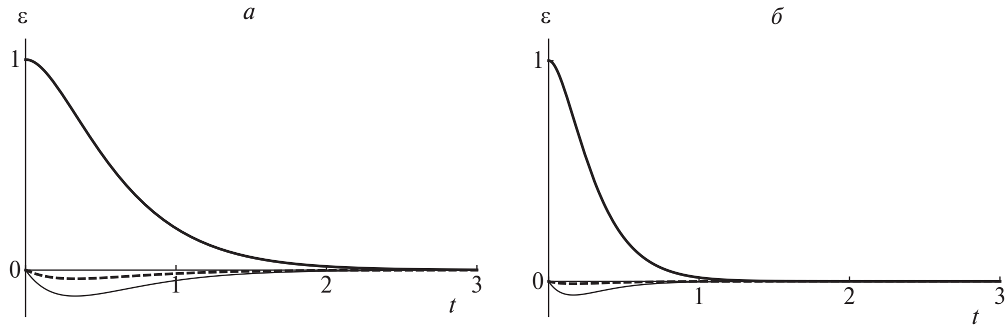

Рис. 1. Динамика ошибок композитного наблюдателя (22) для ЛНСВС (25).

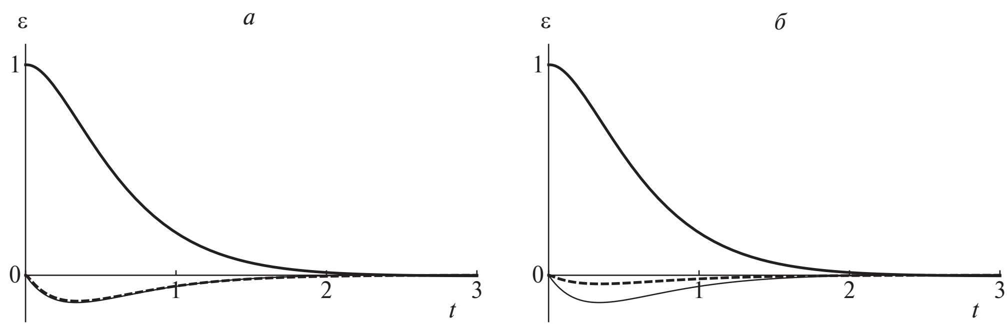

Рис. 2. Динамика ошибок редуцированных наблюдателей (29) и (30).

5. Семейство быстрых подсистем (27) уже имеет Фробениусову форму с $\alpha_f = (-1)$, поэтому $G_f(t) = 1$. Выберем $\lambda_f = -3$, тогда $\beta_f = (-3)$ и $k_f(t) = (2)$.

6. Рассчитаем коэффициенты (21): $k_1(t) = (2\alpha(t) - 28,\, 15)'$, $k_2 = (2)$.

7. Матричные функции (20) $\tilde{A}_1(t) = A_1(t)$, $\tilde{A}_2(t) = (-3\alpha(t) + 30,\, -15)'$, $\tilde{A}_3(t) = (0, 1)$, $\tilde{A}_4(t) = (-3)$ для ЛНСВС (25) удовлетворяют условиям (v), (vi) теоремы 1.

8. Окончательно робастный μ-асимптотический ρ-экспоненциальный композитный наблюдатель полного порядка (22) для ЛНСВС (25) при $\rho = 2$ примет вид:

$$\begin{aligned} \dot{w}_{x1}(t) &= (\alpha(t) - 1)w_{x2}(t) - 3(\alpha(t) - 10)w_y(t) + 2(\alpha(t) - 14)v(t), \\ \dot{w}_{x2}(t) &= -w_{x1}(t) - w_{x2}(t) - 15w_y(t) + 15v(t), \\ \mu\dot{w}_y(t) &= w_{x2}(t) - 3w_y(t) + 2v(t). \end{aligned} \tag{28}$$

На рис. 1, 2 и в табл. 1 продемонстрированы результаты численных экспериментов с моделью (25) с начальными условиями $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 0$, $y(0) = 0$, при $\alpha(t) = \sin(t)$, которые выполнены средствами Wolfram Mathematica.

Таблица 1. Интегральная норма ошибок наблюдателя (28), $\alpha(t) = \sin(t)$

	$\mu = 0{,}5$	$\mu = 0{,}1$	$\mu = 0{,}01$
$\|\|\varepsilon_{x1}\|\|_1$	0,6755937	0,668459	0,666458
$\|\|\varepsilon_{x2}\|\|_1$	0,112656	0,111410	0,111141
$\|\|\varepsilon_{y}\|\|_1$	0,037552	0,0371366	0,030469

На рис. 1 изображена динамика ошибок ε_{x1} (толстая), ε_{x2} (тонкая), ε_y (пунктир) композитного наблюдателя (22) для ЛНСВС (25) при $\mu = 0{,}01$. Рисунок 1,*а* соответствует выбору $\lambda_i = -3$, рис. 1,*б* соответствует $\lambda_i = -6$ и демонстрирует изменение динамики ошибок наблюдателя при увеличении показателя экспоненциального убывания.

Для сравнения качества оценивания при различных значениях малого параметра, рассчитаем интегральную норму ошибок наблюдателя (28) на интервале $[0, 30]$ (табл. 1).

Сравнение оценок ошибок из табл. 1 подтверждает, что при уменьшении значения μ уменьшается ошибка оценивания.

Редуцированный наблюдатель (23) для ЛНСВС (25) имеет вид

$$\begin{gathered}\dot{w}_{sx1}(t) = 9w_{sx2}(t) - 8v(t),\\ \dot{w}_{sx2}(t) = -w_{sx1}(t) - 6w_{sx2}(t) + 5v(t),\\ w_{sy} = w_{sx2}(t), \quad w_{sx1}(0) = 0, \quad w_{sx2}(0) = 0.\end{gathered} \tag{29}$$

Редуцированный наблюдатель (24) для ЛНСВС (25) имеет вид

$$\begin{gathered}\dot{w}_{xs1}(t) = 9w_{xs2}(t) - 8v(t), \quad w_{xs1}(0) = 0,\\ \dot{w}_{xs2}(t) = -w_{xs1}(t) - 6w_{xs2}(t) + 5v(t), \quad w_{xs2}(0) = 0,\\ w_{ys}(t) = \frac{1}{3}w_{xs2}(t) + \frac{2}{3}v(t).\end{gathered} \tag{30}$$

Динамика ошибок ε_{x1} (толстая), ε_{x2} (тонкая), ε_y (пунктир) редуцированных наблюдателей (29) и (30) для ЛНСВС (25) при $\alpha(t) = \sin(t)$, $\mu = 0{,}01$, $\lambda_i = -3$ представлена на рис. 2: 2,*а* для наблюдателя (29) и 2,*б* для наблюдателя (30).

Пример 2. Рассмотрим ЛНСВС

$$\begin{gathered}\dot{x}_1(t) = \left(\varphi(t) - \frac{\dot{\gamma}(t)}{\gamma(t)} - \delta(t)\right)x_1(t) + \zeta(t)x_2(t) + \delta(t)y(t),\\ \dot{x}_2(t) = (\gamma(t) - \alpha(t))\,x_1(t) + \xi(t)x_2(t) + \alpha(t)y(t),\\ \mu\dot{y}(t) = x_1(t) - y(t),\\ v(t) = -x_1(t) + x_2(t) + y(t),\ t \in T,\end{gathered} \tag{31}$$

где $\varphi(t) = \sin(t)+1$, $\gamma(t) = \sin(t)+2$, $\delta(t) = \sin(t)+1-\frac{\cos(t)}{\sin(t)+2}$, $\xi = -\sin(t)-1$, $\zeta = \cos(t)$, $\alpha(t)$ не является дважды непрерывно дифференцируемой хотя бы в одной точке $t \in T$.

Система (31) в виде (1)–(2) имеет параметры $n_1 = 2$, $n_2 = m = 1$ и матрицы

$$A_1 = \begin{pmatrix} \varphi(t) - \dfrac{\dot\gamma(t)}{\gamma(t)} - \delta(t) & \zeta(t) \\ \gamma(t) - \alpha(t) & \xi(t) \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} \delta(t) \\ \alpha(t) \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} -1 \end{pmatrix}, \quad C_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}.$$

Для ЛНСВС (31) матричная функция $A(t,\mu)$ (4) не является дважды непрерывно дифференцируемой и для такой системы не существует классической матрицы наблюдаемости. Поэтому построение наблюдателя по схеме [5] непосредственно для ЛНСВС (31) невозможно. Однако, как показано ниже, для системы (31) можно построить наблюдатель (22).

1. ВС (8) для ЛНСВС (31)

$$\begin{gathered} \dot{\bar x}_1(t) = \left(\varphi(t) - \frac{\dot\gamma(t)}{\gamma(t)}\right)\bar x_1(t) + \zeta(t)\bar x_2(t), \\ \dot{\bar x}_2(t) = \gamma(t)\bar x_1(t) + \xi(t)\bar x_2(t), \\ \bar v_s(t) = \bar x_2(t), \quad t \in T, \end{gathered} \tag{32}$$

имеет класс $\{E_2, 2\}$. Для ВС (32) определена классическая матрица наблюдаемости: $S_{E_2}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \gamma & \xi \end{pmatrix}$. Так как $\operatorname{rank} S_{E_2}(t) = 2 = n_1, \forall t \in T$, то согласно утверждению 3 ВС (32) равномерно наблюдаема и выполнено условие (i) теоремы 1.

2. t-семейство быстрых подсистем для ЛНСВС (31) совпадает с (27), значит, выполнено условие (iii) теоремы 1.

3. Зададим скорость экспоненциального убывания ошибок наблюдателя: $\rho = 2$.

4. Выберем $\lambda_i = -3$, рассчитаем $\beta_s = (-9, -6)'$.

5. Преобразование (16) ВС (32) с помощью матрицы $G_s(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\gamma} & \frac{\varphi}{\gamma} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ приводит к канонической форме Фробениуса (17) с $\alpha_s(t) = \ (-\dot\varphi - \xi\varphi + \zeta\gamma,\ \varphi + \xi)'$.

Рассчитанные векторы коэффициентов усиления для подсистем:

$k_s(t) = \begin{pmatrix} \gamma^{-1}\left(9 + 6\varphi + \varphi^2 - \dot\phi\right) + \zeta \\ 6 + \xi + \varphi \end{pmatrix}$, $k_f = (2)$.

6. По (21) имеем: $k_1(t) = \begin{pmatrix} -2\delta + 3\zeta + 3\gamma^{-1}\left((\varphi+3)^2 - \dot\varphi\right) \\ -2\alpha + 3(6 + \xi + \varphi) \end{pmatrix}$, $k_2(t) = (2)$.

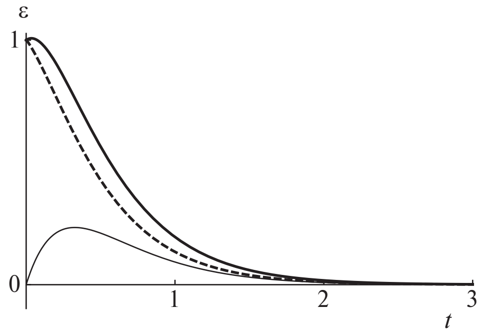

Рис. 3. Динамика ошибок композитного наблюдателя (22) для ЛНСВС (31).

7. Матричные функции (20)

$$\tilde{A}_1(t) =$$
$$= \begin{pmatrix} 3(\zeta-\delta)+\varphi+\gamma^{-1}(3(\varphi+3)^2-\dot{\gamma}-3\dot{\varphi}) & 2(\delta-\zeta)-3\gamma^{-1}((\varphi+3)^2-\dot{\varphi}) \\ -3\alpha+\gamma+3(6+\xi+\varphi) & 2\alpha+\xi-3(6+\xi+\varphi) \end{pmatrix},$$

$$\tilde{A}_2(t) = \begin{pmatrix} 3\delta-3\zeta-3\gamma^{-1}\Big((\varphi+3)^2-\dot{\varphi}\Big) \\ 3\alpha-3(6+\xi+\varphi) \end{pmatrix}, \quad \tilde{A}_3(t) = \begin{pmatrix} 3 & -2 \end{pmatrix},$$
$$\tilde{A}_4(t) = \begin{pmatrix} -3 \end{pmatrix}$$

для ЛНСВС (31) удовлетворяют условиям *(v), (vi)* теоремы 1.

8. Согласно теореме 1 робастный μ-асимптотический ρ-экспоненциальный композитный наблюдатель полного порядка для ЛНСВС (31) с параметрами из п. 6 при $\rho = 2$ имеет вид (22) с рассчитанными в п. 6 коэффициентами $k_1(t)$, $k_2(t)$.

На рис. 3 изображена динамика ошибок ε_{x1} (толстая), ε_{x2} (тонкая), ε_y (пунктир) композитного наблюдателя (22) для ЛНСВС (31) с начальными условиями $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 0$, $y(0) = 1$ при $\mu = 0{,}01$.

7. Заключение

Предложенный метод синтеза наблюдателей состояний ЛНСВС позволяет разбить задачу на решение независимых подзадач синтеза наблюдателей для систем меньшей размерности, часть из которых является стационарными, обеспечить робастность наблюдателей по малому параметру и существенно ослабить известные требования на гладкость коэффициентов. Вектор коэффициентов усиления композитного наблюдателя выражен через коэффициенты усиления не зависящих от малого параметра подсистем, соответствующих разделению временных масштабов. Ошибка оценивания состояния с произвольным наперед заданным показателем экспоненциального убывания сходится к бесконечно малой величине того же порядка малости, что и малый параметр.

Теорема 1 дает достаточные условия существования робастного μ-асимптотического ρ-экспоненциального наблюдателя ЛНСВС. Построены μ-асимптотические композитные наблюдатели (22) полного и (23), (24) редуцированного порядков. Приведен конструктивный алгоритм рассчета вектора коэффициентов усиления (18), (19), (21) композитного наблюдателя, даны иллюстративные примеры.

При построении робастного μ-асимптотического ρ-экспоненциального наблюдателя ЛНСВС ρ выбирается так, чтобы обеспечить желаемую скорость сходимости ошибок наблюдения в $O(\mu)$-окрестность нуля.

Заметим, что при построении μ-асимптотического ρ-экспоненциального наблюдателя ЛНСВС не требуется существования канонической формы Фробениуса и квазидифференцируемости выходных функций исходной ЛНСВС.

Полученные результаты могут быть использованы при проектировании систем управления, идентификации и диагностики динамических систем, описываемых линейными нестационарными сингулярно возмущенными системами.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 1.

Из (i) следует, что ВС (A_s, c_s) (8) равномерно наблюдаема и для нее существует ρ-экспоненциальный наблюдатель. При выполнении предположения (iii) существует $\mu^0\rho$-экспоненциальный наблюдатель для t-семейства быстрых подсистем (9).

Будем искать наблюдатель полного порядка для ЛНСВС (5) в виде динамической системы (7). Вектор коэффициентов усиления $K(t,\mu)$ будем искать в виде

$$K(t,\mu) = \mathrm{diag}\ \left\{E_{n_1}, \frac{1}{\mu}E_{n_2}\right\}\begin{pmatrix} k_1(t) \\ k_2(t) \end{pmatrix}, \quad k_1(t) \in \mathbb{R}^{n_1}, \quad k_2(t) \in \mathbb{R}^{n_2},$$

где $k_1(t), k_2(t)$ пока не определены. Тогда наблюдатель (7) примет вид (22), а уравнения динамики ошибок $\varepsilon_x(t,\mu) = x(t,\mu) - w_x(t,\mu)$, $\varepsilon_y(t,\mu) = y(t,\mu)-$ $-w_y(t,\mu)$ для наблюдателя (22) будут иметь вид

$$\begin{gathered} \dot{\varepsilon}_x(t) = \tilde{A}_1(t)\varepsilon_x(t) + \tilde{A}_2(t)\varepsilon_y(t), \quad \varepsilon_x \in \mathbb{R}^{n_1}, \\ \mu\dot{\varepsilon}_y(t) = \tilde{A}_3(t)\varepsilon_x(t) + \tilde{A}_4(t)\varepsilon_y(t), \quad \varepsilon_y \in \mathbb{R}^{n_2}, \quad t > t_0. \end{gathered} \tag{П.1}$$

Поскольку система динамики ошибок наблюдения (П.1) имеет вид ЛНСВС (1)–(2), то при выполнении предположений теоремы (v), (vi) для системы ошибок (П.1) выполнены условия теоремы 3.1 из [33, с. 212] и, значит, существует расщепляющее Ляпуновское преобразование вида (3.4) из [33, с. 210] с непрерывно дифференцируемыми ограниченными на T матрицами $\tilde{L}(t,\mu)$, $\tilde{H}(t,\mu)$, которые удовлетворяют следующей системе (чтобы не загромождать запись, зависимость функций от аргумента t в некоторых местах будем опускать):

$$\tilde{A}_3 - \tilde{A}_4\tilde{L}(\mu) + \mu\tilde{L}(\mu)\left(\tilde{A}_1 - \tilde{A}_2\tilde{L}(\mu)\right) = \mu\dot{\tilde{L}}(\mu), \tag{П.2}$$

$$\mu\left[\tilde{A}_1 - \tilde{A}_2\tilde{L}(\mu)\right]\tilde{H}(\mu) - \tilde{H}(\mu)\left[\tilde{A}_4 + \mu\tilde{L}(\mu)\tilde{A}_2\right] + \tilde{A}_2 = \mu\dot{\tilde{H}}(\mu). \tag{П.3}$$

Из (П.2), (П.3) с учетом (i), (vi) имеем аппроксимацию:

$$\begin{gathered}
\tilde{L}\,(t,\mu) = A_4^{-1}\,(t)\,k_2(t)c_2(t)\tilde{L}(t,\mu)\tilde{A}_3(t) + O(\mu),\\
\tilde{L}(t,\mu) = \tilde{A}_4^{-1}(t)\tilde{A}_3(t) + O(\mu),\\
\tilde{H}\,(t,\mu) = \left(\tilde{H}\,(t,\mu)\,k_2(t)c_2(t) + \tilde{A}_2(t)\right)A_4^{-1}\,(t) + O(\mu),\\
\tilde{H}\,(t,\mu) = \tilde{A}_2(t)\tilde{A}_4^{-1}\,(t) + O(\mu).
\end{gathered} \tag{П.4}$$

В результате расщепляющего преобразования система динамики ошибок (П.1) примет вид разделенной по временным шкалам системы:

$$\begin{gathered}
\dot{\varepsilon}_\xi(t) = A_\xi(t,\mu)\varepsilon_\xi(t), \quad \varepsilon_\xi \in \mathbb{R}^{n_1},\\
\mu\dot{\varepsilon}_\eta(t) = A_\eta(t,\mu)\varepsilon_\eta(t), \quad \varepsilon_\eta \in \mathbb{R}^{n_2}, \quad t > t_0,
\end{gathered} \tag{П.5}$$

где

$$A_\xi(t,\mu) = \tilde{A}_1(t) - \tilde{A}_2(t)\tilde{L}(t,\mu), \quad A_\eta(t,\mu) = \tilde{A}_4(t) + \mu\tilde{L}(t,\mu)\tilde{A}_2(t). \tag{П.6}$$

При этом согласно утверждению 1 для решений (П.1) и (П.5) справедливы равенства:

$$\begin{gathered}
\varepsilon_\xi(t) = \varepsilon_x(t) + O(\mu),\ \varepsilon_x(t) = \varepsilon_\xi(t) + O(\mu),\\
\varepsilon_\eta(t) = \tilde{A}_4^{-1}(t)\tilde{A}_3(t)\varepsilon_x(t) + \varepsilon_y(\tau) + O(\mu),\\
\varepsilon_y(t) = -\tilde{A}_4^{-1}(t)\tilde{A}_3(t)\varepsilon_\xi(t) + \varepsilon_\eta(\tau) + O(\mu).
\end{gathered} \tag{П.7}$$

Положим

$$k_2(t) = k_f(t) \tag{П.8}$$

и будем искать $k_1(t)$ в виде

$$k_1(t) = k_s(t) + \tilde{H}^0(t)k_2(t), \quad \tilde{H}^0(t) = (A_2(t) - k_s(t)c_2(t))A_4^{-1}(t). \tag{П.9}$$

Подставим (П.9), (П.8) в (П.6) и выполним последовательно преобразования:

$$\begin{gathered}
A_\xi(\mu) \overset{(\text{П.9})}{=} A_1 - \left(k_s + \tilde{H}^0k_2\right)c_1 - \left(A_2 - \left(k_s + \tilde{H}^0k_2\right)c_2\right)\tilde{L}(\mu) =\\
= \left(A_1 - A_2\tilde{L}(\mu)\right) - \left(k_s + \tilde{H}^0k_2\right)\left(c_1 - c_2\tilde{L}(\mu)\right) =
\end{gathered}$$

$$\stackrel{(\Pi.4)}{=} A_1 - A_2 A_4^{-1}\left(k_2 c_2 \tilde{L}(\mu) + A_3 - k_2 c_1\right) -$$
$$-\left(k_s + \tilde{H}^0 k_2\right)\left[c_1 - c_2 A_4^{-1}\left(k_2 c_2 \tilde{L}(\mu) + A_3 - k_2 c_1\right)\right] + O(\mu) =$$
$$\stackrel{(As,cs)}{=} A_s - k_s c_s + \left(-A_2 + k_s c_2 + \tilde{H}^0 k_2 c_2\right) A_4^{-1} k_2 c_2 \tilde{L}(\mu) +$$
$$+\left(A_2 - k_s c_2 - \tilde{H}^0 A_4\right) A_4^{-1} k_2 c_1 + \tilde{H}^0 k_2 c_2 A_4^{-1}\left(A_3 - k_2 c_1\right) + O(\mu) =$$
$$\stackrel{(\Pi.9)}{=} A_s - k_s c_s + \tilde{H}^0 k_2 c_2 A_4^{-1}\left(A_4 \tilde{L}(\mu) + k_2 c_2 \tilde{L}(\mu) - k_2 c_1 + A_3\right) + O(\mu) =$$
$$\stackrel{(\Pi.4)}{=} A_s - k_s c_s + O(\mu).$$

Таким образом, для $A_\xi(t,\mu)$ при $k_1(t), k_2(t)$ вида (П.9), (П.8) справедлива аппроксимация:

$$A_\xi(t,\mu) = A_s(t) - k_s(t) c_s(t) + O(\mu). \tag{П.10}$$

Далее, из (П.6) следует

$$A_\eta(t,\mu) = (A_4(t) - k_2(t) c_2(t)) + O(\mu). \tag{П.11}$$

Таким образом, объединяя (П.10) и (П.11), из (П.5) получаем:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_\xi(t) &= \left(A_s(t) - k_s(t) c_s(t) + O(\mu)\right)\varepsilon_\xi(t), \\ \mu\dot{\varepsilon}_\eta(t) &= \left(A_4(t) - k_2(t) c_2(t) + O(\mu)\right)\varepsilon_\eta(t), \quad t > t_0. \end{aligned} \tag{П.12}$$

Поскольку в (П.12) $k_s(t)$, $k_2(t)$ – это коэффициенты усиления для наблюдателя (14) ВС (8) и наблюдателя (15) семейства СП (9), то параметры системы ошибок (П.12) $O(\mu)$ – близки к параметрам системы динамики ошибок для наблюдателей ВС и t-семейства быстрых подсистем с векторами коэффициентов усиления k_s и k_f соответственно. Поэтому в силу непрерывной зависимости решения (П.12) от аддитивных возмущений коэффициентов системы справедливы оценки $||\varepsilon_\xi(t)|| \leqslant c_{\rho_s}\exp\left(-\rho(t-\bar{t})\right) + O(\mu),\ t \geqslant \bar{t}$, $||\varepsilon_\eta(t)|| \leqslant c_{\rho_f}\exp\left(-\mu^0\rho\frac{(t-\bar{t})}{\mu}\right) + O(\mu),\ t \geqslant \bar{t}$, откуда с учетом (П.7) вытекает справедливость оценок

$$||\varepsilon_x(t)|| \leqslant c_{\rho_s}\exp(-\rho(t-\bar{t})) + O(\mu), \quad t \geqslant \bar{t},$$
$$||\varepsilon_y(t)|| \leqslant c_{\rho_s}||\tilde{A}_4^{-1}(t)\tilde{A}_3(t)||\exp(-\rho(t-\bar{t})) + c_{\rho_f}\exp\left(-\mu^0\rho\left(\frac{t-\bar{t}}{\mu}\right)\right) + O(\mu),$$
$$t \geqslant \bar{t}.$$

Пусть $c_\rho = \max\{c_{\rho_s}, c_{\rho_f}, c_{\rho_s}||\tilde{A}_4^{-1}(t)\tilde{A}_3(t)||\}$. При $\mu \in (0,\mu^0]$ имеет место оценка $\exp\left(-\mu^0\rho\left(\frac{t-\bar{t}}{\mu}\right)\right) < \exp\left(-\rho\left(t-\bar{t}\right)\right)$, $t \geqslant \bar{t}$, откуда следует справедливость оценок $||\varepsilon(t,\mu)|| \leqslant c_\rho\exp(-\rho(t-\bar{t})) + O(\mu)$, $t \geqslant \bar{t}$, и согласно определению 7 и из совпадения (П.9) и (21) – справедливость теоремы 1.

Благодарю профессора Астровского А.И. за ценные советы и указания, высказанные в процессе обсуждения материала этой работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Квакернаак Х., Сиван Р.* Линейные оптимальные системы управления. М.: Мир, 1977.
2. *O'Reilly J.* Observers for linear systems. London: Academic Press, 1983.
3. *Краснова С.А., Уткин В.А., Михеев Ю.В.* Каскадный синтез наблюдателей состояния нелинейных многомерных систем // АиТ. 2001. № 2. С. 43–64.
4. *Коровин С.К., Фомичев В.В.* Наблюдатели состояния для линейных систем с неопределенностью. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007.
5. *Астровский А.И., Гайшун И.В.* Оценивание состояний линейных нестационарных систем наблюдения // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 3. С. 370–379. https://doi.org/10.1134/S0374064119030117
6. *Куок Д.В., Бобцов А.А.* Адаптивный наблюдатель переменных состояния линейных нестационарных систем с параметрами, заданными не точно // АиТ. 2020. № 12. С. 100–110. https://doi.org/10.31857/S0005231020120065
7. *Luenberger D.G.* Observing the state of a linear system // IEEE Transactions on Military Electronics. 1964. Vol. 8. No. 2. P. 74–80. https://doi.org/10.1109/TME.1964.4323124
8. *Luenberger D.G.* An introduction to observers // IEEE Trans. Automat. Contr. 1971. Vol. Ac-16. P. 596–602. https://doi.org/10.1109/TAC.1971.1099826
9. *Васильева А.Б., Дмитриев М.Г.* Сингулярные возмущения в задачах оптимального управления // Итоги науки и техники ВИНИТИ. Мат. анализ. 1982. Т. 20. С. 3–77. https://doi.org/10.1007/BF01262406
10. *Naidu D.S.* Singular perturbations and time scales in control theory and applications: an overview // Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems Series B: Applications & Algorithms. 2002. No. 9. P. 233–278.
11. *Дмитриев М.Г., Курина Г.А.* Сингулярные возмущения в задачах управления // АиТ. 2006. № 1. С. 3–51. https://doi.org/10.1134/S0005117906010012
12. *Zhang Y., Naidu D.S., Cai C., Zou Y.* Singular perturbations and time scales in control theory and applications: An overview 2002–1012 // Int. l J. Inform. Syst. Sci. 2014. No. 9. P. 1–36.
13. *Курина Г.А., Калашникова М.А.* Сингулярно возмущенные задачи с разнотемповыми быстрыми переменными // АиТ. 2022. № 11. С. 3–61. https://doi.org/10.31857/S0005231022110010
14. *O'Reilly J.* Full-order observers for a class of singularly perturbed linear time-varying systems // Int. J. Control. 1979. V. 30. No. 5. P. 745–756.
15. *Yousfi B., Raissi T., Amairi M., Aoun M.* Interval observers design for singularly perturbed systems // 53rd IEEE Conference on Decision and Control, Los Angeles, CA, USA. 2014. P. 1637–1642. https://doi.org/10.1109/CDC.2014.7039634
16. *Locatelli A.* State observation and output feedback stabilization of linear singularly perturbable systems // IFAC Proceedings Volumes. 1976. V. 9. Is. 3. P. 335–343. https://doi.org/10.1016/S1474-6670(17)67356-7
17. *Porter B.* Singular perturbation methods in the design of full-order observers for multivariable linear systems // Int. J. Control. 1977. V. 26. No. 4. P. 589–594. https://doi.org/10.1080/00207177708922332

18. *Yoo H., Gajic Z.* New designs of reduced-order observer-based controllers for singularly perturbed linear systems // Math. Probl. Eng. 2017. V. 2017. P. 1–14. https://doi.org/10.1155/2017/2859548

19. *Duan Z., Kravaris C.* Reduced-order Nonlinear Observer Design for Two-time-scale Systems // IFAC-PapersOnLine. V. 53. Is. 2. 2020. P. 5922–5927. https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2020.12.1643

20. *Deghat M., Nesic D., Teel A.R., Manzie C.* Observing the Slow States of General Singularly Perturbed Systems // 59th IEEE Conference on Decision and Control (CDC), Jeju, Korea (South). 2020. P. 4206–4211. https://doi.org/10.1109/CDC42340.2020.9304464

21. *Cuevas L., Nesic D., Manzie C.* Robustness analysis of nonlinear observers for the slow variables of singularly perturbed systems // Int. J. Robust Nonlinear Control. 2020. V. 30. No. 14. P. 5628–5656. https://doi.org/10.1002/rnc.5100

22. *Каленова В.И., Морозов В.М.* Линейные нестационарные системы и их приложения к задачам механики. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010.

23. *Шин Д.* О квазидифференциальных операторах в гильбертовом прстранстве // Докл. АН СССР. 1938. Т. 18. № 5. С. 523–526.

24. *Астровский А.И., Гайшун И.В.* Линейные системы с квазидифференцируемыми коэффициентами: управляемость и наблюдаемость движений. Минск: «Беларус. навука», 2013.

25. *Копейкина Т.Б., Цехан О.Б.* К теории наблюдаемости линейных сингулярно возмущенных систем // Весцi НАН Беларусi. Сер. фiз.-мат. навук. 1999. № 3. С. 22–27.

26. *Цехан О.Б.* Условия полной наблюдаемости линейных стационарных сингулярно возмущенных систем второго порядка с запаздыванием // Весн. ГрДУ iмя Я. Купалы. Сер. 2, Матэматыка. Фiзiка. Iнфарматыка, вылiчальная тэхнiка i кiраванне. 2014. № 1 (170). С. 53–64.

27. *Цехан О.Б.* Условия поточечной управляемости и поточечной наблюдаемости линейных стационарных сингулярно возмущенных систем с запаздыванием // Труды Института математики НАН Беларуси. 2021. Т. 29. № 1–2. С. 138–148.

28. *Tsekhan O., Pawluszewicz E.* Observability of singularly perturbed linear time-varying systems on time scales // 26th International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics (MMAR). 2022. P. 116–121. https://doi.org/10.1109/MMAR55195.2022.9874295

29. *Цехан О.Б.* Робастные достаточные условия равномерной наблюдаемости линейной нестационарной сингулярно возмущенной системы // Дифференциальные уравнения и математическая физика, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз., ВИНИТИ РАН, М. 2023. Т. 226. С. 150–164. https://doi.org/10.36535/0233-6723-2023-226-150-164

30. *Tsekhan O.* Robust sufficient conditions for the observability of a linear time-invariant singularly perturbed system with delay // Commun. Optim. Theory. 2023. P. 1–10. https://doi.org/10.23952/cot.2023.24

31. *Цехан О.Б.* Квазидифференцируемость и равномерная наблюдаемость линейных нестационарных сингулярно возмущенных систем // Дифференц. уравнения. 2023. Т. 59. № 8. С. 1123–1138. https://doi.org/10.31857/S0374064123080113

32. *Wolovich W.A.* On state estimation of observable systems // Preprint NASA Electronics Research Center. Cambridge. 1968. No. 6. P. 210–220. https://doi.org/10.1109/JACC.1968.4169084

33. *Kokotovic P.V., Khalil H.K., O'Reilly J.* Singular perturbations methods in control: analysis and design. NY. Academic Press, 1999.

34. *Калман Р., Фалб П., Арбиб М.* Очерки по математической теории систем. М.: Мир, 1971.

35. *Астровский А.И.* Наблюдаемость линейных нестационарных систем. Минск: МИУ, 2007.

36. *Гайшун И.В.* Введение в теорию линейных нестационарных систем. Мн.: Институт математики НАН Беларуси, 1999.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.А. Бобцовым.

Поступила в редакцию 28.11.2023

После доработки 28.02.2024

Принята к публикации 04.03.2024